

Graphes

M. GEORGES-SAINT-MARC - NSI - Lycée Mendès France Rennes

15 décembre 2020

1 Vocabulaire

Exercice 1 : Un exemple de réseau

Voici une carte du réseau des TER en Bretagne.

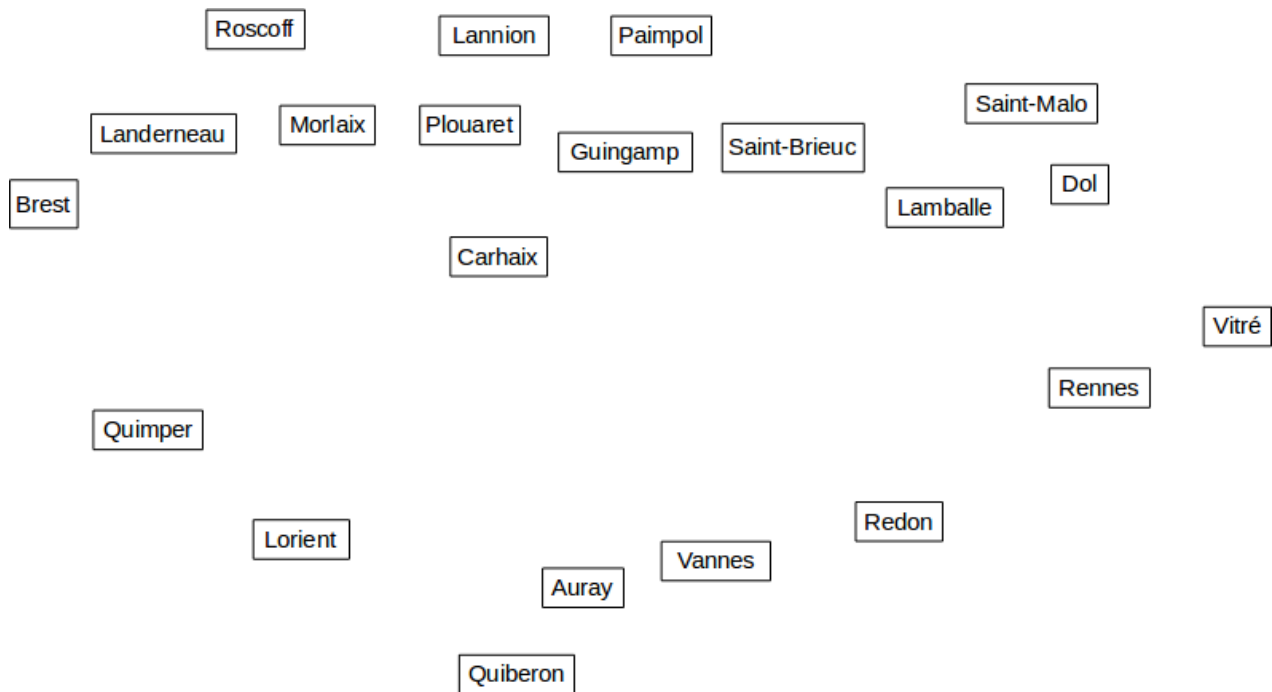


Cet ensemble peut-être représenté par la structure mathématique abstraite appelée **graphe**.

Un graphe est composé de sommet (les *gares* dans notre exemple) et d'arêtes (les **liaisons** existantes entre deux *gares* dans notre exemple).

1. Compléter les arêtes dans le graphe Γ ci-après.

On ne retiendra que les liaisons ferroviaires et non les liaisons par cars.



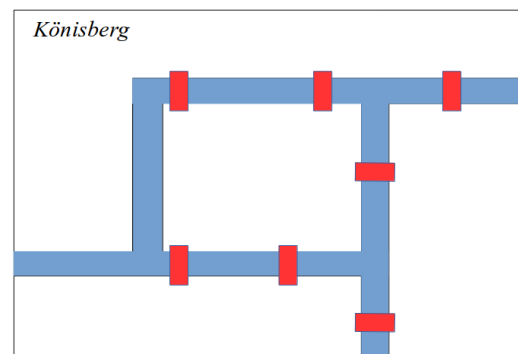
2. On appelle **ordre** du graphe le nombre total de sommets. Quel est l'ordre de ce graphe ?
3. On appelle **degré** d'un sommet le nombre d'arêtes reliées à ce sommet. Quel est le degré de Morlaix ? Faire un tableau à deux lignes qui donnera pour chaque sommet du graphe (noté en première ligne) le degré du sommet (noté en deuxième ligne).

Sommet	Brest	...
Degré	1	...

4. Si deux sommets sont reliés par une arête, on dit qu'ils sont **adjacents**. On appelle **chaîne** toute succession de sommets adjacents. Citer trois chaînes qui permettent de relier Rennes à Brest.
5. La **longueur** d'une chaîne est le nombre d'arêtes qu'elle emprunte.
 - a) Donner la longueur de la chaîne : Saint-Malo - Redon.
 - b) Citer une chaîne de longueur 5.
6. On appelle **distance** entre deux sommets la longueur de la chaîne la plus courte.
 - a) Quelle est la distance entre Roscoff et Redon ?
 - b) Dans un tableau à double entrée, donner l'ensemble des distances entre deux villes (on placera en ligne **et** en colonne les noms de tous les sommets).
 - c) On appelle **diamètre** du graphe la plus grande distance entre deux sommets du graphe. Quel est le diamètre de ce graphe ?

Exercice 2 : Un problème historique

Au XVIII^e siècle, les habitants de Königsberg (actuellement Kaliningrad en Russie) aimaient se promener le dimanche. La ville de Königsberg comprenait sept ponts, selon la configuration ci-dessous. Le souhait des habitants était de faire un trajet n'empruntant qu'une et une seule fois chaque pont.



1. Traduire cette situation à l'aide d'un graphe.
2. Expliquer pourquoi ce problème ne peut pas avoir de solution.
3. Quelle arête peut-on ajouter au graphe pour qu'une solution existe ?

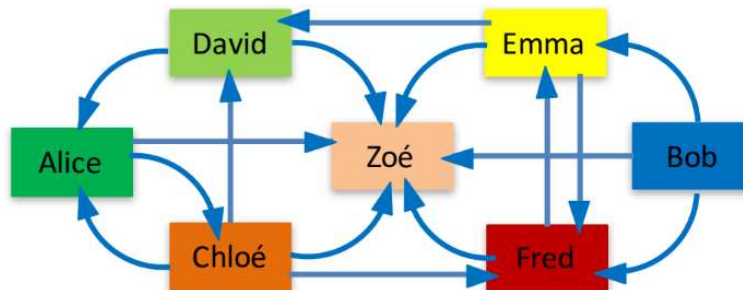
2 Graphe orienté, matrice d'adjacence

Dans les exemples précédents, les arêtes sont empruntables dans les deux sens. Ce n'est pas toujours le cas, tant dans les réseaux routiers (sens de circulation interdit) que dans les réseaux... sociaux par exemple !

Dans certains réseaux sociaux, le principe est en effet que certains abonnés peuvent **suivre** le contenu mis en ligne par d'autres abonnés, sans pour autant que la réciproque soit nécessaire.

Exercice 3 :

1. Citer deux réseaux sociaux qui fonctionnent par ce principe de non-réciprocité dans le suivi de contenu, et deux réseaux sociaux qui au contraire donnent un égal accès à l'information des deux côtés.
2. On donne l'exemple ci-dessous :



Décrire les interactions d'Emma : combien de personne suit-elle ? Combien de personnes la suivent ?

3. À première vue, qui est le/la plus populaire ?

Remarque : *populaire* pourrait ici probablement être remplacé par *narcissique* ...

Pour la suite de l'exercice, on numérotera chaque sommet du graphe ci-dessus ainsi :

- Alice = 0
- David = 1
- Chloé = 2
- Zoé = 3
- Emma = 4
- Fred = 5
- Bob = 6

4. On peut représenter numériquement les arêtes du graphes dans une **matrice d'adjacence**.

→ Le coefficient situé à l'interaction de la ligne i et de la colonne j correspond alors au nombre d'arêtes qui vont du sommet i vers le sommet j .

Ainsi, l'intersection de la ligne 4 et de la colonne 3 vaut 1, car Emma *suit* Zoé sur le réseau social.

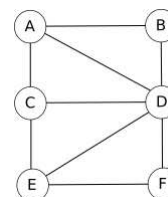
Par contre, l'intersection de la ligne 3 et de la colonne 4 vaut 0, car la réciproque n'est pas vraie.

Représenter la matrice d'adjacence de ce graphe (7 lignes, 7 colonnes).

5. Coder la matrice en Python, puis écrire un algorithme qui permet de donner, à partir de la matrice d'adjacence et du numéro de la personne, le nombre de personne qu'elle suit et le nombre de personne qui la suivent sur ce réseau social.

Exercice 4 :

1. Construire la matrice d'adjacence du graphe non orienté ci-contre (on décrira les sommets dans la matrice par ordre alphabétique).
2. Quelle particularité a la matrice d'adjacence d'un graphe non orienté ?



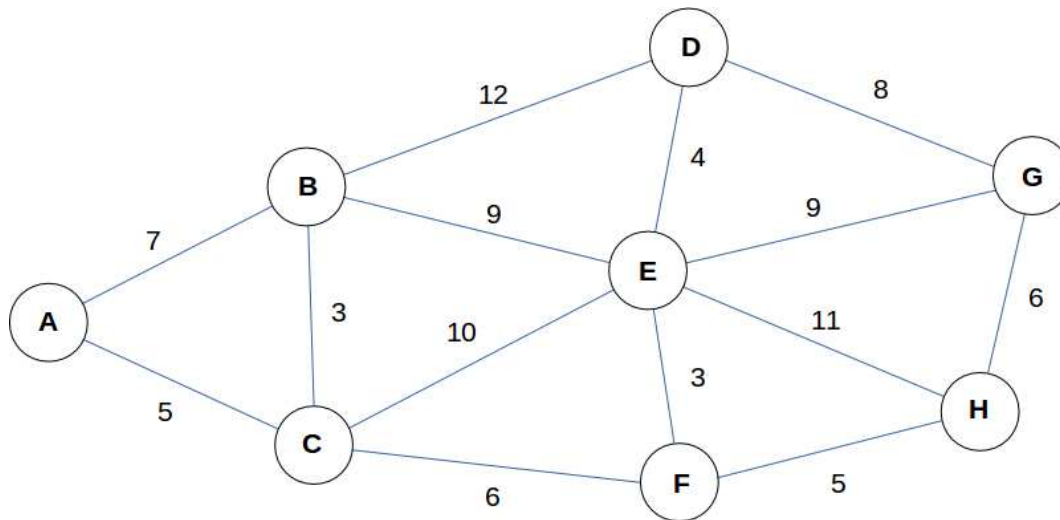
3 Graphe étiqueté, graphe pondéré

Exercice 5 :

On a représenté ci-dessous un réseau de routeurs permettant le transfert d'informations sur le web.

Les arêtes du graphes comportent désormais des informations : on parle de **graphe étiqueté**. Comme ces informations sont toutes des nombres réels, on parle plus précisément de **graphe pondéré** (chaque arête ayant un certain **poids**).

Les poids des arêtes correspondent au délai (en millisecondes) de transfert moyen d'un paquet de 128 octets entre deux routeurs.



1. Quel est l'ordre du sommet A ?
2. On souhaite transmettre l'information le plus rapidement. Donner le chemin optimal pour aller de A à E.
3. La matrice d'adjacence d'un graphe pondéré contient les poids d'une arête à l'autre (et 0 s'il n'y a aucune arête). Donner la matrice d'adjacence de ce graphe (on décrira les sommets par ordre alphabétique).
4. À l'aide de l'algorithme de Dijkstra (*cf complément de cours*), déterminer le chemin le plus court entre les sommets A et G.